Fungerer greit for $\left.\begin{matrix} np \\ n(1-p) \end{matrix}\right\} \geq 5$

6.6. Gamma og eksponentiell fordeling

$X \sim$ Poisson prosess. $\quad P(X=x) = \dfrac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$

La T = tida til 1. hending

$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(X = 0$ i intervallet $[0,t])$

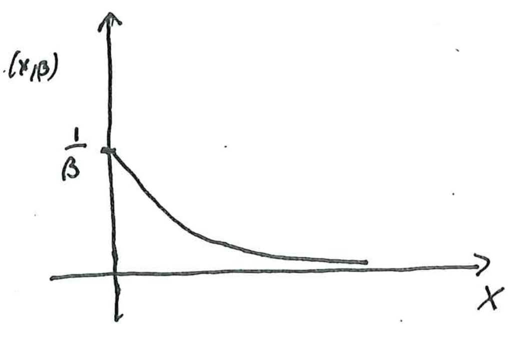
$$= 1 - \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & \text{elles.} \end{cases}$$

Ei fordeling med sannsynstettleik gitt ved

$$f(x,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{elles} \end{cases}$$

blir kalla ei eksponentiell fordeling



$$E[X] = \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = \left[-x e^{-\frac{x}{\beta}}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

$$= \left[-\beta e^{-\frac{x}{\beta}}\right]_0^\infty = \beta$$

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 \cdot \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = \left[-x^2 e^{-\frac{x}{\beta}}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty x e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

$$= 2 \cdot \beta \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = 2\beta^2 \Rightarrow Var[X] = 2\beta^2 - \beta^2 = \beta^2$$

$$\Rightarrow SD(X) = \beta = E[X].$$

Medianen i ei kontinuerleg fordeling finn ved å finne m slik at $P(X \le m) = \frac{1}{2}$.

Eksponentialfordeling:

$$\int_0^m \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[-e^{-\frac{x}{\beta}}\right]_0^m = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{m}{\beta}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{m}{\beta}} = -\ln 2 \Leftrightarrow m = \beta \ln 2 = 0.69\beta.$$

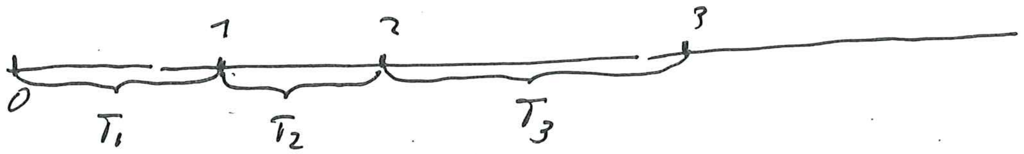
Eksponentialfordeling og hukommelse

Vil finne $P(X \ge t_0 + t \mid X \ge t_0) = \dfrac{P(X \ge t_0 + t)}{P(X \ge t_0)}$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{\beta}(t_0+t)}}{e^{-\frac{1}{\beta}t_0}} = e^{-\frac{t}{\beta}} = P(X \ge t)$$

La T vere tida til hending nr α i Poisson-prosessen

$T = T_1 + T_2 + \dots + T_\alpha$ der T_1 er tida til 1. hending, T_2 er tida frå 1. hending til 2. hending o.s.b.



$T = \sum_{i=1}^{\alpha} T_i$ er då gammafordelt med parametrar α og β

Generelt. X seiast å vere gammafordelt med parametrane
form skala.
α og β dersom

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x>0, \quad \alpha>0, \beta>0\\ 0, & \text{elles}\end{cases}$$

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx, \qquad \alpha>0$$

$$=\left[-e^{-x}x^{\alpha-1}\right]_0^\infty+\int_0^\infty e^{-x}(\alpha-1)x^{\alpha-2}\,dx=(\alpha-1)\underbrace{\int_0^\infty x^{\alpha-2}e^{-x}\,dx}_{\Gamma(\alpha-1)}$$

$$\Rightarrow \Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

α heiltal $\Rightarrow \Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$

$$E[X]=\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}\,dx \overset{y=\frac{x}{\beta}}{=} \frac{\beta^\alpha}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^\alpha e^{-y}\beta\,dy$$

$$=\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^\alpha e^{-y}\,dy=\frac{\beta\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}=\alpha\beta$$

Tilsv. $E[X^2]=(\alpha+1)\alpha\beta^2$

og $Var[X]=(\alpha+1)\alpha\beta^2-\alpha^2\beta^2=\alpha\beta^2$

	Binomisk forsøksrekkje	Poisson prosess
Forsøk / tid til 1. hending	geometrisk	eksponential
– " – til k-te – " .	Neg binomisk	Gamma.

NB $\alpha=1 \Rightarrow$ Gammafordeling = eksponentialfordeling.

7.2 Funksjonar av tilfeldige variable

La X vere diskret fordelt $\quad f(x) = P(X=x)$

La Y vere ein ein til ein transformasjon av X

$$X \underset{W}{\overset{U}{\longrightarrow}} Y \qquad \text{o:} \quad \begin{array}{l} Y = U(X) \\ X = W(Y) = U^{-1}(Y) \end{array}$$

Vi får $\quad P(Y=y) = P(U(X)=y) = P(X=U^{-1}(y)) = P(X=W(y))$

$$= f(W(y)). \qquad \text{Teorem 7.1}$$

Eks. X er geometrisk fordelt $\quad P(A) = \frac{3}{4}$

$$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} \cdot \frac{3}{4}, \quad x = 1, 2, \dots$$

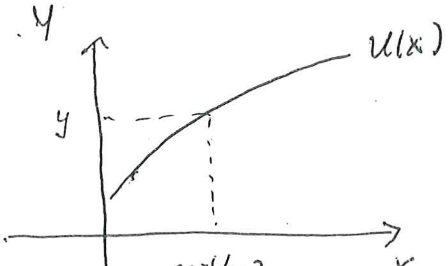
La $Y = X^2 \Rightarrow X = \sqrt{Y}$ og $P(Y=y) = f(\sqrt{y}) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{y}-1}$

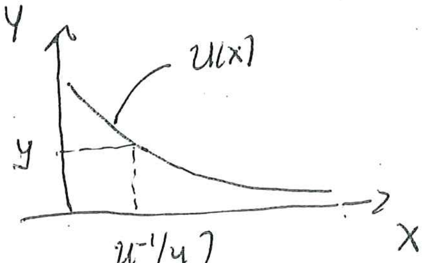
$y = 1, 4, 9, \dots$

La X vere kontinuerleg fordelt med sannsynstettleik $f(x)$ og Y ein ein til ein transformasjon av X

$$Y = U(X), \quad X = W(Y) = U^{-1}(X)$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(U(X) \le y) = \begin{cases} P(X \le U^{-1}(y)), & U \text{ strengt aukande} \\ P(X > U^{-1}(y)), & \text{dersom } U \text{ er strengt avtakande} \end{cases}$$





$$= \begin{cases} F_X(U^{-1}(y)), & U \text{ strengt aukande} \\ 1 - F_X(U^{-1}(y)), & U \text{ er strengt avtakande} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \left\{ \begin{array}{ll} f_X(W(y))\, W'(y), & U \text{ strengt aukande} \\ -f_X(W(y))\, W'(y), & U \text{ strengt avtakande} \end{array} \right\} = f_X(W(y))\,|W'(y)|$$

Teorem 7.3

Eksempel

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{elles} \end{cases}$$ ∴: X er uniformt fordelt på $(0,1)$

$$Y = -\frac{1}{\lambda} \ln X \Rightarrow X = e^{-\lambda Y} = W(Y), \quad Y > 0, \quad \lambda > 0$$

Vi får $f_Y(y) = f(W(y))\,|W'(y)| = \begin{cases} 1 \cdot \lambda e^{-\lambda y}, & y > 0, \ \lambda > 0 \\ 0, & \text{elles} \end{cases}$

∴: Y er eksponential fordelt.

7.3 Momentgenererande funksjonar

Definisjon 7.1. R-te moment til ein tilfeldig variabel X er definert ved.

$$\mu_r' = E[X^r] = \begin{cases} \sum_x x^r f(x), & X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\,dx, & X \text{ kontinuerleg.} \end{cases}$$

Målet med momentgenererande funksjonar er å finne momenta i ei fordeling. Dei kan og brukast til å finne fordelinga til funksjonar av tilfeldige variablar

Eks. X er $\begin{cases} \text{binomisk} \\ \text{poisson} \\ \text{normal} \\ \text{eksponential} \end{cases}$ Kva med $\sum X_i$

Def. 7.2

Momentgenererande funksjon er definert ved

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f(x), & X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx, & X \text{ kontinuerleg} \end{cases}$$

Vi har $$\frac{d^r M_X(t)}{dt^r} = \begin{cases} \sum_x x^r e^{tx} f(x), & X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{tx} f(x)\,dx, & X \text{ kontinuerleg.} \end{cases}$$

slik at $$E[X^r] = \left.\frac{d^r M_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = \mu_r'$$

Eksempel

$X \sim$ Bernoulli fordelt $\quad$ ɔ:

x	0	1
$P(X=x)$	$1-p$	p

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{t\cdot 0}(1-p) + e^t p = 1-p+pe^t$$

$$\frac{d\,M_X(t)}{dt} = pe^t. \Rightarrow E[X] = \left.\frac{d\,M_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = p.$$

$$E[X^2] = \left.\frac{d^2 M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \left. pe^t\right|_{t=0} = p \Rightarrow Var[X] = p - p^2 = p(1-p)$$

$X \sim$ geometrisk fordelt med sannsyn p ɔ: $P[X=x] = (1-p)^{x-1} \cdot p$, $x=1,2,3$

$$M_X(t) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx}(1-p)^{x-1}p = pe^t \sum_{x=1}^{\infty} e^{t(x-1)}(1-p)^{x-1}$$